ΜΚΔ:

ΠΟΡΙΣΜΑ 1: Δυο ακέραιοι α, β είναι πρώτοι μεταξύ τους αν και μόνο αν: $\exists \kappa, \lambda \in \mathbb{Z}$ ώστε: $\kappa\alpha + \lambda\beta = 1$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

($\Rightarrow$): Έστω $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ πρώτοι μεταξύ τους
τότε $(\alpha, \beta) = 1$ και επομένως
$\exists \kappa, \lambda \in \mathbb{Z}$ ώστε $\kappa\alpha + \lambda\beta = 1$.

($\Leftarrow$): Έστω τώρα ότι $\exists \kappa, \lambda \in \mathbb{Z}$ ώστε $\kappa\alpha + \lambda\beta = 1$
και ας είναι $\delta = (\alpha, \beta) \Rightarrow \delta | \alpha$ & $\delta | \beta$
επομένως $\delta | (\kappa\alpha + \lambda\beta) = 1 \Rightarrow \delta = 1$.

Παρατήρηση: Εαν $\kappa\alpha + \lambda\beta = \delta$ είναι η γραμμική έκφραση του ΜΚΔ των ακεραίων α, β, τότε:

$$\kappa\left(\frac{\alpha}{\delta}\right) + \lambda\left(\frac{\beta}{\delta}\right) = 1 \Rightarrow \left(\frac{\alpha}{\delta}, \frac{\beta}{\delta}\right) = 1$$

Δηλαδή:
"Αν διαιρέσουμε δυο ακεραίους με το ΜΚΔ προκύπτουν αριθμοί πρώτοι μεταξύ τους"

ΠΟΡΙΣΜΑ 2: Οι κοινοί διαιρέτες δύο ακεραίων α, β είναι διαιρέτες του ΜΚΔ τους.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω $\delta = (\alpha, \beta)$. Προφανώς κάθε διαιρέτης του δ είναι και κοινός διαιρέτης των α και β.
Αλλά και αντίστροφα, κάθε κοινός διαιρέτης δ' των α και β είναι και διαιρέτης του ΜΚΔ των α και β. Πράγματι, εαν $\kappa\alpha + \lambda\beta = \delta$ είναι η γραμμική έκφραση του δ, τότε $\delta' | (\kappa\alpha + \lambda\beta)$ δηλαδή $\delta' | \delta$

ΠΟΡΙΣΜΑ 3: Αν για τους ακεραίους α, β, γ, ισχύει

$$\alpha \mid \beta\gamma \text{ και } (\alpha, \beta) = 1 \Longrightarrow \alpha \mid \gamma$$

(Δηλαδή, αν ένας ακέραιος διαιρεί το γινόμενο δύο ακεραίων και είναι πρώτος προς τον έναν τότε διαιρεί τον άλλον)

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Επειδή $(\alpha, \beta) = 1 \Rightarrow (\exists k, \lambda \in \mathbb{Z}) : \alpha k + \lambda\beta = 1$ και επομένως, $k\alpha\gamma + \lambda\beta\gamma = \gamma$. Αφού, $\alpha \mid \alpha\gamma$ και $\alpha \mid \beta\gamma$, θα ισχύει: $\alpha \mid (k\alpha\gamma + \lambda\beta\gamma) \Rightarrow \alpha \mid \gamma$.

Παρατήρηση!

Η συνθήκη $(\alpha, \beta) = 1$ είναι αναγκαία για να ισχύει το θεώρημα. Για παράδειγμα: $4 \mid 2 \cdot 6$, $4 \nmid 2 \wedge 4 \nmid 6$

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ (ΜΚΔ) (ΕΚΠ)

1) ΝΔΟ για τους ακέραιους α, β, k ισχύουν

i) $(\alpha,\beta) = (\alpha - k\beta, \beta)$

ii) $(\alpha,\beta) = (\alpha - \beta, \beta)$

iii) $(\alpha, \alpha+1) = 1$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

i) Έστω $\delta = (\alpha,\beta)$ και $\delta' = (\alpha - k\beta, \beta)$

Εξ ορισμού του ΜΚΔ:

- $\delta | \alpha$ και $\delta | \beta \Rightarrow \delta | (\alpha - k\beta)$ και $\delta | \beta$

Άρα, $\delta | (\alpha - k\beta, \beta) \Rightarrow \delta | \delta'$ (1)

- $\delta' | (\alpha - k\beta)$ και $\delta' | \beta \Rightarrow \delta' | [(\alpha - k\beta) + k\beta]$ και $\delta' | \beta$

Άρα, $\delta' | \alpha$ και $\delta' | \beta \Rightarrow \delta' | (\alpha,\beta) = \delta \Rightarrow \delta' | \delta$ (2)

Επομένως, από (1) και (2) έχουμε ισότητα $(\delta = \delta')$

ii) Πρόκειται για ειδική περίπτωση της (i)

για $k = 1$, ισχύει $(\alpha,\beta) = (\alpha - \beta, \beta)$.

iii) $(\alpha, \alpha+1) \overset{(*)}{=} (\alpha, \alpha+1-\alpha) = (\alpha, 1) = 1$

(*) Η ισότητα ισχύει από την (i).

2) Αν για τους $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z}$, ισχύει: $\alpha | \gamma$ και $\beta | \gamma$

καθώς $(\alpha,\beta) = 1$ τότε νδο $\alpha \cdot \beta | \gamma$.

ΛΥΣΗ

$(\alpha,\beta) = 1 \Rightarrow (\exists k, \lambda \in \mathbb{Z}): k\alpha + \lambda\beta = 1$

Επομένως, $k\alpha\gamma + \lambda\beta\gamma = \gamma$ (1)

όμως, $\alpha | \gamma$ και $\beta | \gamma \Rightarrow \gamma = \mu\alpha$ και $\gamma = \nu\beta$, $\forall \mu, \nu \in \mathbb{Z}$

Έτσι η (1) γίνεται:

$k\nu(\alpha \cdot \beta) + \lambda\mu(\alpha \cdot \beta) = \gamma \Rightarrow \alpha\beta | \gamma$.

3) i. Αν $k>0$, νδο $(k\alpha, k\beta) = k(\alpha, \beta)$
ii. Να βρεθεί ο ΜΚΔ των 63 και 84

ΛΥΣΗ

i. Έστω $(\alpha,\beta)=\delta$ και $(k\alpha, k\beta)=\delta'$
Αρκεί νδο $k\delta \mid \delta'$ και $\delta' \mid k\delta$
Επειδή, $\delta \mid \alpha$ και $\delta \mid \beta$, έχουμε $k\delta \mid k\alpha$ και $k\delta \mid k\beta$. Άρα, $k\delta \mid \delta'$. Αφού $\delta = (\alpha,\beta)$ τότε θα $(\exists\, \mu,\nu \in \mathbb{Z}) : \mu\alpha + \nu\beta = \delta$ και επομένως $k\mu\alpha + k\nu\beta = k\delta$. Όμως, $\delta' \mid k\alpha$ και $\delta' \mid k\beta$.
Άρα, $\delta' \mid k\delta$

ii. $(63,84) = (3\cdot 21, 3\cdot 28) = 3(21,28) = 3(7\cdot 3, 7\cdot 4) =$
$= 3\cdot 7\cdot (3,4) = 21\cdot 1 = 21$
Διαδοχικοί

4) i. ΝΔΟ $[k\alpha, k\beta] = k[\alpha,\beta]$ $\forall x \in \mathbb{Z}, x>0$
ii. Να βρεθεί το ΕΚΠ $[120,150]$

ΛΥΣΗ

i. $[k\alpha, k\beta] = \dfrac{|k\alpha|\cdot|k\beta|}{(k\alpha,k\beta)} = k^2 \cdot \dfrac{|\alpha\cdot\beta|}{\cancel{k}(\alpha,\beta)} = k\cdot \dfrac{|\alpha|\cdot|\beta|}{(\alpha,\beta)} = k[\alpha,\beta]$

ii. $[120,150] = [10\cdot 12, 15\cdot 10] = 10\cdot[12,15] = 10\cdot[3\cdot 4, 3\cdot 5] =$
$= 10\cdot 3\cdot [4,5] = 10\cdot 3\cdot 20 = 600$.